TD n° 5 de Macroéconomie
La fonction de production néoclassique et le modèle de Solow

Licence AES AGE,AGT,CAI, semestre 5

Faculté de Droit et des Sciences Économiques de Limoges

Exercice 1 :La fonction du production néoclassique

La fonction de production Cobb-Douglas est le la forme :

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$$

Question 1 : Montrez que cette fonction vérifie les conditions d'Inada.

Question 2 : Calculez la productivité marginale de capital à partir de l'expression de Y_t et à partir de l'expression de y_t (Il faut tenir compte du fait que $Y_t = PmK_t.K_t + PmL_tL_t$ qui est la conséquence des rendements constants à l'échelle)

Exercice 2 : Le modèle de Solow

Nous supposons l'existence de deux pays qui ont la même fonction de production du type :

$$Y_t = K_t^{0,3}L_t^{0,7}$$

soit par tête de travailleur :

$$y_t = k_t^{0,3}$$

Par ailleurs ces pays ont le même taux de croissance de la population et la même dépréciation du capital tel que $(n + \delta) = 8\%$.

Question 1 : Pour le pays A seuls les capitalistes épargnent. Ils épargnent une part constante disons $s^{\pi} = 0,3$ du **revenu du capital**. Déterminez le capital d'état stationnaire.

Question 2 : Pour le pays B seuls les travailleurs épargnent. Ils épargnent une part constante disons $s^{w} = 0,2$ du **revenu du travail**. Déterminez le capital d'état stationnaire.

Question 3 : trouvez la relation entre s^{π} et s^{w} qui égalise les capitaux par tête et donc la production par tête.

Correction

Exercice 1 :

On va montrer que la fonction de production Cobb-Douglas vérifie les conditions d'INADA.

Condition # 1 : Les rendements marginaux sont positifs et décroissants.

Positif : Dit autrement la PmK et la PmL (productivité marginale du capital et productivité marginale du travail) sont positives : Ajouter une unité de capital ou une unité de travail permet d'augmenter la production. Vérifions cela avec la fonction de production :

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmK_t = \alpha {K_t}^{\alpha-1} {L_t}^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmL_t = (1-\alpha) {K_t}^{\alpha} {L_t}^{-\alpha} = (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} > 0$$

Décroissants : chaque unité de capital (ou de travail) supplémentaire augmente de moins en moins la production. Pour s'assurer de cela il faut re-dériver les productivités marginales et s'assurer qu'elles sont négatives.

$$\frac{\partial PmK_t}{\partial K_t} = (\alpha-1)\alpha {K_t}^{\alpha-2} {L_t}^{1-\alpha} = -(1-\alpha)\alpha \frac{L_t^{1-\alpha}}{K_t^{2-\alpha}} < 0$$

$$\frac{\partial PmL_t}{\partial L_t} = PmL_t = -\alpha(1-\alpha){K_t}^{\alpha}{L_t}^{-\alpha-1} = -\alpha(1-\alpha)\frac{{K_t}^{\alpha}}{L_t^{1+\alpha}} < 0$$

Condition # 2 : Les limites aux bornes.

Les limites des productivités marginales tendent vers $+\infty$ lorsque la quantité de facteur utilisé tend vers 0 et tendent vers 0 lorsque la quantité de facteur utilisé tend vers $+\infty$. Ces conditions servent à assurer l'unicité de l'équilibre dans le modèle Solow. En effet, pour assurer que $s.y_t$ soit supérieur à $(n+\delta)k_t$ lorsque k_t est très petit, il suffirait que $s.Pmk$ soit supérieur à $(n+\delta)k_t$. Tant qu'à faire, qui peut le plus peut le moins, il suffit de supposer que la limite de la Pmk_t tende vers $+\infty$ lorsque k_t tend vers 0. Un autre solution consisterait à poser que $f(0) > 0$ mais cette possibilité est écarté dans la mesure où il est impensable que l'on puisse produire sans capital.

$$PmK_t = \alpha \left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}$$

On voit bien que si l'on fixe L_t les limites de la PmK_t sont :

$$\lim_{K_t \to 0} PmK_t = +\infty$$

$$\lim_{K_t \to +\infty} PmK_t = 0$$

De la même façon :

$$PmL_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}$$

On voit bien que si l'on fixe K_t les limites de la PmL_t sont.

$$\lim_{L_t \to 0} PmL_t = +\infty$$

$$\lim_{L_t \to +\infty} PmL_t = 0$$

Condition # 3 : Rendements constants à l'échelle.

Si l'on multiplie tous les facteurs de production par une valeurs quelconque (positive), disons λ, la production est multipliée par λ.

$$A(\lambda K_t)^{\alpha}(\lambda L_t)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}{K_t}^{\alpha}{L_t}^{1-\alpha} = \lambda y_t$$

Exercice 2 :

Le but de cet exercice voir comment l'état stationnaire est affecté selon que l'épargne porte sur le revenu du capital ou le revenu du travail. On va donc avoir deux hypothèses alternatives :

1. L'épargne par tête porte sur les seuls revenus du capital :

$$\frac{S_t}{L_t} = s^{\pi}Pmk_tk_t$$

où S_t représente l'épargne globale, L_t le nombre de travailleurs, Pmk_tk_t le revenu brut du capital par tête.

2. L'épargne porte sur les seuls revenus du travail :

$$\frac{S_t}{L_t} = s^{w}w_t$$

où S_t représente l'épargne globale,L_t le nombre de travailleurs, $w_t = y_t - Pmk_tk_t$ le salaire.

L'épargne porte sur le revenu du capital

L'équation dynamique d'accumulation du capital par tête va s'écrire :

$$Dk_t = s^{pi}Pmk_tk_t - (n+\delta)k_t$$

En remarquant que $Pmk_tk_t = \alpha y_t$ (conséquence de la fonction de production Cobb-Douglas) on en déduit que :

$$Dk_t = s^{pi}\alpha y_t - (n+\delta)k_t$$

A l'état stationnaire $Dk_t = 0$. En remplaçant y_t par son expression ($y_t = Ak_t^{\alpha}$) et en résolvant en k_t on trouve :

$$k^* = \left(\frac{A\alpha s^{\pi}}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \text{et donc} \qquad y^* = \left(\frac{A\alpha s^{\pi}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Application numérique : $A = 1$, $(n+\delta) = 0,08$, $\alpha = 0,3$, $s^\pi = 0,3$.

$$k^* = \left(\frac{0.3 \times 0.3}{0,08}\right)^{\frac{1}{1-0,3}} = 1,1832 \qquad \text{et donc} \qquad y^* = \left(\frac{0,3 \times 0,3}{0,08}\right)^{\frac{0,3}{1-0,3}} = 1,0517$$

L'épargne porte sur le revenu du travail

L'équation dynamique d'accumulation du capital par tête va s'écrire :

$$Dk_t = s^w w_t - (n+\delta)k_t$$

En remarquant que $w_t = y_t - Pmk_t k_t = (1-\alpha)y_t$ (conséquence de la Cobb-Douglas), on peut écrire :

$$Dk_t = s^w(1-\alpha)y_t - (n+\delta)k_t$$

A l'état stationnaire $Dk_t = 0$. En remplaçant y_t par son expression ($y_t = Ak_t^\alpha$) et en résolvant en k_t on trouve :

$$k^* = \left(\frac{A(1-\alpha)s^w}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \text{et donc} \qquad y^* = \left(\frac{A(1-\alpha)s^w}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Application numérique : $A = 1$, $(n+\delta) = 0,08$, $\alpha = 0,3$, $s^w = 0,2$.

$$k^* = \left(\frac{(1-0.3) \times 0.2}{0,08}\right)^{\frac{1}{1-0,3}} = 2,2243 \qquad \text{et donc} \qquad y^* = \left(\frac{(1-0,3) \times 0,3}{0,08}\right)^{\frac{0,3}{1-0,3}} = 1.2710$$

Lien entre s^π et s^w pour égaliser le capital par tête.

On désire que :

$$k^*_w = \left(\frac{A(1-\alpha)s^w}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^*_{pi} = \left(\frac{A\alpha s^\pi}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

IL est clair que dans ce cas :

$$\frac{A(1-\alpha)s^w}{n+\delta} = \frac{A\alpha s^\pi}{n+\delta}$$

En simplifiant :

$$(1-\alpha)s^w = \alpha s^{pi}$$

C'est le lien entre enter les taux d'épargne qui permet aux deux économies A et B d'avoir le même capital par tête donc la même production par tête.

Remarque : Si dans le modèle de Solow on introduisait l'épargne par tête sous la forme :

$$\frac{S_t}{L_t} = s^\pi Pmk_t k_t + s^w w_t$$

On obtiendrait :

$$k^* = \left(\frac{A(1-\alpha)s^w + A\alpha s^\pi}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Comme dans le modèle de Solow on épargne sur le revenu $s^w = s^\pi = s$ et donc on retrouve bien :

$$k^* = \left(\frac{As}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$